Vzorce pro dvojnásobný argument

1. Aniž určíte hodnotu x, určete hodnoty goniometrických funkcí $\sin 2x; \cos 2x, tg 2x$.
   a) $\sin x = \frac{3}{4} \wedge x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ b) $\cos x = -\frac{3}{5} \wedge x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ c) $tgx = \frac{1}{2} \wedge x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

2. Aniž určíte hodnotu x, určete hodnoty goniometrických funkcí sin x a cos x, víte-li, že platí:
   $\cos 2x = \frac{3}{4} \wedge 2x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

3. Vypočtěte:
   a) $2\sin 22°30'.\cos 22°30'$ b) $\sin 15°.\cos 15°$ c) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$

4. Určete, pro která x mají rovnosti smysl a dokažte jejich správnost:
   a) $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$ b) $4\sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 2x = 1$
   c) $\dfrac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = \cot gx$ d) $\dfrac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x} = \cos 2x$
   e) $\dfrac{\sin 2x - \cos x}{1 - \cos 2x - \sin x} = \cot gx$ f) $\dfrac{2tgx}{1 + tg^2 x} = \sin 2x$

Součtové vzorce

5. Dokažte:
   a) $\sin 75° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ b) $\cos \frac{7}{12}\pi = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ c) $tg 15° = 2 - \sqrt{3}$
   d) $\cos 105° = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ e) $\sin \frac{7}{12}\pi = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ f) $tg 75° = 2 + \sqrt{3}$

6. Vypočtěte:
   a) $\sin 44°.\cos 1° + \cos 44°.\sin 1°$ b) $\cos \frac{9}{13}\pi - \cos \frac{4}{13}\pi - \sin \frac{9}{13}\pi.\sin \frac{4}{13}\pi$

7. Dokažte pomocí součtových vzorců a vzorců pro dvojnásobný argument:
   a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ b) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
8. Dokažte:
   a) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ b) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
   c) $\sin x - \sin(x + 60)° + \sin(x + 120°) = 0$ d) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7}{6}\pi + x\right) = -\cos x$
   e) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos x$ f) $\dfrac{\sin x}{\sin y} + \dfrac{\cos x}{\cos y} = \dfrac{2\sin(x + y)}{\sin 2y}$

Vzorce pro poloviční argument

9. Dokažte:
   a) $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ b) $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ c) $\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
   d) $\cos 22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ e) $2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos x$ f) $1 + \sin x = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2$

Řešení:

1) a) $\sin 2x = -\frac{3\sqrt{7}}{8}; \cos 2x = -\frac{1}{8}; tg 2x = 3\sqrt{7}$ b) $\sin 2x = \frac{24}{25}; \cos 2x = -\frac{7}{25}; tg 2x = -\frac{24}{7}$;

c) $\sin 2x = \frac{4}{5}; \cos 2x = \frac{3}{5}; tg 2x = \frac{4}{3}$;

2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{4}; \cos x = \frac{\sqrt{14}}{4}$; 3) a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $a) x \in R;. b) x \in R;. c) x \neq k\frac{\pi}{2};. d) x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;. e) x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi;. f) x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

6) a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) -1;